

# Studie zur Entstehung der Kräfte in elektrischen Maschinen\*

## 1 Einleitung

Die Kräfte in elektrischen Maschinen werden durch stromdurchflossene Leiter in magnetischen Feldern erzeugt. Ein Leiter der Länge  $l$  mit dem Strom  $I$  erfährt im Feld mit der Flußdichte  $B_f$  die Lorentzkraft

$$F = B_f \cdot I \cdot l \quad (1.1)$$

Da nun die Leiter des Rotors in den Maschinen vielfach in Nuten liegen und die Flußdichte in den Nuten bekanntermaßen deutlich geringer ist als das Feld  $B_f$  der Maschine (Feld ohne Ankerstrom), ist die Kraft auf genutete Leiter entsprechend geringer. Gleichwohl besteht Anlaß zu glauben, daß die vom Strom erzeugte Kraft die gleiche Größe erreicht wie in Gl. 1.1. Für runde geschlossene Nuten konnte dies formal tatsächlich nachgewiesen werden [6, 8]. Die geringere Kraft auf den Leiter wird nämlich ersetzt durch Feldkräfte, die auf das Eisen des Rotors wirken und durch die sogenannte Maxwell'sche Spannungen entstehen. Das sind mechanische Spannungen, die an Grenzflächen mit unterschiedlicher Permeabilität im magnetischen Feld wirken.

Das Problem muß genauer gefaßt werden, da die Felder bei genutetem Rotor nicht homogen sind. Dazu sei das Bild 1 betrachtet.

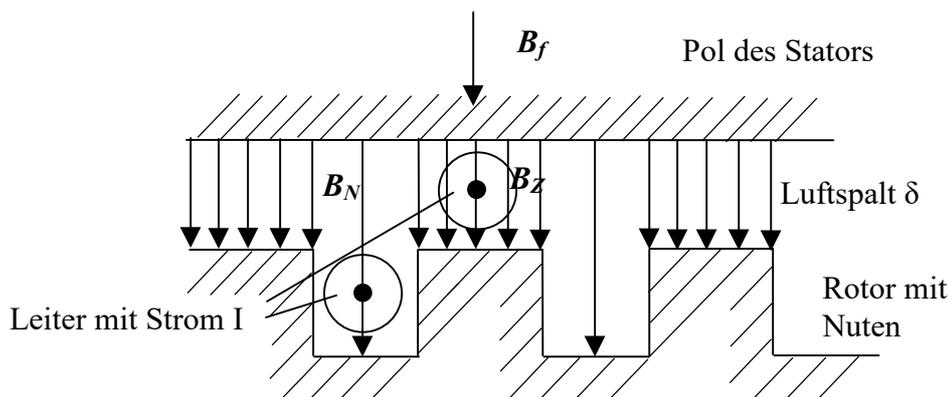


Bild 1.1: Idealisierter Flußverlauf im Nutbereich einer elektrischen Maschine

Durch die magnetische Erregung wird in den Polen ein magnetisches Feld mit der Flußdichte  $B_f$  erzeugt. Der Fluß tritt durch den Luftspalt in den Rotor über. Im Zahnbereich ist der Abstand zwischen Pol und Rotor durch die Luftspaltbreite  $\delta$  gegeben. Weil der Abstand dort am geringsten ist, ist die Flußdichte  $B_Z$  am größten. Im Nutbereich ist der Abstand wesentlich größer, so daß sich ein geringerer Fluß  $B_N$  einstellt. Diese Tatsache wird in der Praxis mit Hilfe des Carterschen Faktors [7] berücksichtigt, durch den der physikalische Luftspalt in einen magnetisch wirksamen umgerechnet wird nach der Beziehung

$$\delta_m = k \cdot \delta \quad (1.2)$$

Die Betrachtung von Bild 1.1 ist eine starke Vereinfachung. Wie sich die Flüsse aufteilen, und wie ihr Verlauf über dem Umfang des Rotors aussieht, läßt sich nicht einfach beantworten. Es ist zum Beispiel so, daß die Feldlinien des Flusses nicht nur gerade verlaufen, sondern auch seitlich in die Nuten hineingreifen. Sicher kann man aber sagen, daß  $B_Z \neq B_f$  gilt und daß  $B_Z$  nicht so genau zur Verfügung steht.

\* Auf Anregung von Fred Wiznerowicz, HS-Hannover und Hartmut Grabinski, Universität Hannover

Da sich die magnetischen Felder wegen ihrer Komplexität in den meisten Fällen einer vollständigen analytischen Betrachtung entziehen, insbesondere dann, wenn die Magnetisierungskennlinie des Eisens noch in Betracht zu ziehen ist, lassen sich nur für idealisierte Fälle analytische Aussagen treffen. In der neueren Ausgabe von Küpfmüller [2] wird eine schmale, geschlossene Nut betrachtet. Dabei wird die Feldstärkekomponente des Leiters als

$$H \approx \frac{I}{2a} \quad (1.3)$$

angenommen, wobei  $a$  die Nuthöhe ist.

Humburg [3] diskutiert das Problem anhand einer gewöhnlichen Nutform. Er kommt zu dem Ergebnis, daß die Kräfte auf die Nutenflanken nicht groß genug sind. Er rechnet mit der Leiterfeldstärke

$$H \approx \frac{I}{b} \quad (1.4)$$

wobei  $b$  die Breite der Nut ist. Er geht davon aus, daß die Kräfte überwiegend durch den Längszug der Feldlinien entstehen.

Eckhardt [4] betrachtet auch gewöhnliche Nuten und sieht Zugspannungen überwiegend an den Zahnköpfen angreifen, zieht es aber vor, die Kraft über die Luftspaltenergie zu berechnen. Dabei ergibt sich, daß der genutete Leiter die gleiche Kraft bewirkt wie der ungenutete, nämlich die Kraft nach Gl. 1.1. Dabei wird mit der durch den Leiterstrom erzeugten Feldstärke

$$H \approx \frac{I}{2\delta} \quad (1.5)$$

gerechnet, wobei  $\delta$  die Luftspaltbreite darstellt.

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Ansätze in idealisierter Form nachvollzogen, um daraus, soweit möglich, Erkenntnisse über das Wesen der Kraftentwicklung zu gewinnen. Dazu werden zunächst die Grundlagen der mechanischen Spannung an Grenzflächen betrachtet.

## 2 Die Spannung auf Grenzflächen in Magnetfeldern

Die Energiedichte eines magnetischen Feldes ist bei Stoffen mit konstanter Permeabilität gegeben durch [2]

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} B \cdot H \quad (2.1)$$

Die Energiedichte  $w$  ist eine skalare Größe und hat die Einheit

$$[B \cdot H] = \frac{Vs}{m^2} \frac{A}{m} = \frac{Ws}{m^3}$$

Dies kann man aber auch als Kraft pro Fläche schreiben:

$$[B \cdot H] = \frac{Ws}{m^3} = \frac{N}{m^2}$$

Nach dieser Interpretation herrscht im magnetischen Feld ein Druck, d. h. Energiedichten haben die Einheit des Drucks. Diese mechanische Spannung  $\sigma$  wird auch als Maxwellspannung bezeichnet.

An den Grenzflächen von Medien mit unterschiedlicher Permeabilität subtrahieren sich die mechanischen Spannungen [1]. Unabhängig vom Feldverlauf wirken die Spannungen stets senkrecht auf die Grenzfläche. Es sei  $\mathbf{n}_{12}$  der Normalenvektor auf einer Grenzfläche, der von einem Gebiet mit der Permeabilität  $\mu_1$  in Richtung eines Gebietes mit einer kleineren Permeabilität  $\mu_2$  zeigt, dann wirkt die resultierende Spannung in Richtung von  $\mathbf{n}_{12}$ .

$$\boldsymbol{\sigma}_{12} = \frac{1}{2} |B_1 \cdot H_1 - B_2 \cdot H_2| \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.2)$$

In dieser Form ist  $\boldsymbol{\sigma}_{12}$  eine Vektorgröße. Bei  $\mu_1 > \mu_2$  zeigt die Spannung vom Gebiet 1 nach 2. Die Richtung der Felder spielt dabei keine Rolle. In technischen Fragestellungen ist es aber manchmal vorteilhaft, Tangential- und Normalkomponenten der Felder zu unterscheiden, d. h. man definiert Spannungen mit Normalkomponenten

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^n = \frac{1}{2} |B_{n1} \cdot H_{n1} - B_{n2} \cdot H_{n2}| \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.3)$$

und mit tangentialen Komponente

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^t = \frac{1}{2} |B_{t1} \cdot H_{t1} - B_{t2} \cdot H_{t2}| \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.4)$$

Für die normalen und tangentialen Komponenten von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$B_{n1} = B_{n2} = B_n \quad \mu_2 B_{t1} = \mu_1 B_{t2} \quad H_{t1} = H_{t2} = H_t \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \quad \text{sowie} \quad \mu H = B \quad (2.5)$$

Damit erhält Gl. 1.3 für die Normalkomponenten von folgende Form:

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^n = \frac{1}{2} |B_{n1} H_{n1} - B_{n2} H_{n2}| \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{1}{2} |B_n (H_{n1} - H_{n2})| \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{1}{2} B_n^2 \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.6)$$

Nach Auflösung des Betrages und mit und  $\mu_1 > \mu_2$  ergibt sich:

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^n = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} B_n^2 \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.7)$$

Die Entwicklung für die Tangentialkomponenten folgt dem gleichen Schema:

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^t = \frac{1}{2} (B_{t1} H_{t1} - B_{t2} H_{t2}) \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.8)$$

und mit  $H_{t1} = H_{t2} = H_t$  von Gln. 1.5:

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^t = \frac{1}{2} H_t (B_{t1} - B_{t2}) \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.9)$$

Mit den Gln. 1.5 hat man:

$$H_t = \frac{B_{t1}}{\mu_1} = \frac{B_{t2}}{\mu_2} \quad \text{und} \quad B_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1}$$

und kann für Gl. 1.9 schreiben:

$$\boldsymbol{\sigma}_{12}^t = \frac{1}{2} \left( \frac{B_{t1}}{\mu_1} \left( B_{t1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{t1} \right) \right) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1^2} B_{t1}^2 \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.10)$$

Die Gesamtspannung ist die Summen der Anteile der Gln. 2.7 und 2.10, die beide in Richtung von  $\mathbf{n}_{12}$  weisen. Man erhält:

$$\boldsymbol{\sigma}_{12} = \boldsymbol{\sigma}_{12n} + \boldsymbol{\sigma}_{12t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} B_n^2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1^2} B_{t1}^2 \right\} \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \left\{ B_n^2 + \mu_2 \frac{B_{t1}^2}{\mu_1} \right\} \cdot \mathbf{n}_{12} \quad (2.12)$$

Die Richtung der mechanischen Spannung ist also stets senkrecht zur Grenzfläche. Daher beschränkt sich die weitere Betrachtung auf den Betrag der Maxwellspannung. Dabei soll der häufig vorkommende Fall einer Grenzfläche zwischen Eisen und Luft hervorgehoben werden. Für

diesen Fall ist  $\mu_1 = \mu_{Fe}\mu_0$  die Permeabilität von Eisen mit der relativen Permeabilität  $\mu_{Fe}$  und  $\mu_2 = \mu_0$  derjenigen von Luft. Außerdem wird die Schreibweise  $B_n = B_{nFe} = B_{nL}$  und  $B_{t1} = B_{tFe}$  verwendet.

Für Gl. 1.12 ergibt sich damit:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{Fe}\mu_0 - \mu_0}{\mu_{Fe}\mu_0\mu_0} \left\{ B_{nFe}^2 + \mu_0 \frac{B_{tFe}^2}{\mu_r\mu_0} \right\} \quad (2.13)$$

und schließlich

$$\boldsymbol{\sigma}_{12} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{Fe} - 1}{\mu_{Fe}\mu_0} \left\{ B_{nFe}^2 + \frac{B_{tFe}^2}{\mu_{Fe}} \right\} \cdot \mathbf{n}_{12}. \quad (2.14)$$

An Gl. 2.14 ist zu erkennen, daß Tangentialkomponenten der Felder um den Faktor  $1/\mu_{Fe}$  schwächer wirken als die Normalkomponenten.

Im Nachfolgenden werden die Kräfte abgeschätzt, die durch die Flächenspannung auf die Seitenflächen von Nuten in elektrischen Maschinen wirken, die stromdurchflossene Leiter führen.

Bei der Betrachtung soll es um das Prinzip gehen. Der nichtlineare Zusammenhang zwischen Flußdichte und Feldstärke im Eisen sowie die genaue Beschaffenheit des Feldes bleiben unbeachtet. Hier sollen idealisierte Annahmen genügen.

Die Betrachtung ist auch nicht neu. Ergebnisse werden in [2] angeboten für schmale Nuten. In [3] wird das Problem der Krafterzeugung mit Hilfe der Flächenspannungen diskutiert. Die Arbeit [4] erwähnt auch die magnetischen Spannungen und die daraus resultierenden Kräfte, berechnet diese aber aus der magnetischen Energie im Luftspalt der Maschine. Die Arbeit [6] liefert eine analytische Lösung für runde, geschlossene Nuten, allerdings für konstante Permeabilität.

### 3 Berechnung der Nutenkraft nach Küpfmüller

Bei Küpfmüller [2] wird die Kraft auf Nut und Leiter näherungsweise für eine schmale geschlossene Nut berechnet. In älteren Auflagen des Buches ging man noch von offenen Nuten aus.

Das Bild 3.1 zeigt einen Ausschnitt aus einem Rotor mit geschlossenen Nuten. In den Nuten liegen rechteckförmige Leiter, die vom Strom  $I$  durchflossen werden. Für den Umlauf um den mittleren Leiterstrom, der hier voll im Eisen gewählt wurde, gilt nach dem Durchflutungsgesetz:

$$\oint \mathbf{H} ds = I = H_l a + H_u b + H_r a + H_o b \quad (3.1)$$

Wegen  $B = \mu_{Fe}\mu_0 H$ , mit  $\mu_{Fe}$  als relativer Permeabilität des Eisens, kann man auch schreiben

$$\mu_{Fe}\mu_0 I = B_l a + B_u b + B_r a + B_o b \quad (3.2)$$

Vereinfachend wird angenommen, daß die Flußdichten im Umlauf gleich sind.

$$B_l = B_r = B_u = B_o = B_{Umlauf} \quad (3.3)$$

Mit dieser Annahme, die zutreffen dürfte, wenn die Nutüberdeckung nicht zu schmal ist, ergibt sich

$$2(a + b)B_{Umlauf} = \mu_{Fe}\mu_0 I$$

$$B_{Umlauf} = \frac{\mu_{Fe}\mu_0 I}{2(a + b)} \quad (3.4)$$

In Anlehnung an die Vorgehensweise in [2] kann man wie folgt verfahren:

Das Feld  $B_f$  der Maschine hat in den Zähnen die Größe  $B_0$ . Diese Flußdichte wird von  $B_{Umlauf}$  überlagert. An den Zahnflanken stellen sich dann links und rechts folgende tangential Flußdichten ein:

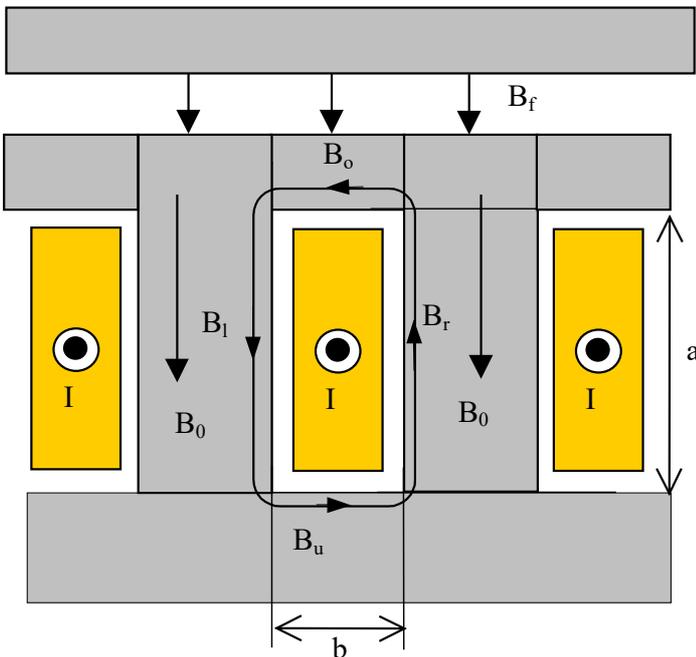


Bild 3.1: Felder bei geschlossener Nut

$$B_{il} = B_0 + B_{Umlauf} = B_0 + \frac{\mu_{Fe}\mu_0}{2(a+b)} I \quad (3.5)$$

$$B_{tr} = B_0 - B_{Umlauf} = B_0 - \frac{\mu_{Fe}\mu_0}{2(a+b)} I \quad (3.6)$$

Mit der Tangentialkomponente von Gl. 2.14  $\sigma_t = \frac{1}{2} \frac{\mu_{Fe}-1}{\mu_{Fe}\mu_0} \frac{1}{\mu_{Fe}} B_{tFe}^2$

können die Kräfte, die auf die Zahnflanken wirken, berechnet werden. Diese wirken jeweils vom Medium höherer Permeabilität in Richtung zum Medium kleinerer Permeabilität, also vom Zahn in Richtung Nut. Da sich die Zahnflanken gegenüberstehen, ist die Differenz der Kräfte von Interesse.

Die Formel läßt sich für die linke und für die rechte Zahnflanke schreiben:

$$\sigma_l = \frac{1}{2} \frac{\mu_{Fe}-1}{\mu_{Fe}\mu_0} \frac{1}{\mu_{Fe}} B_{il}^2 \quad \sigma_r = \frac{1}{2} \frac{\mu_{Fe}-1}{\mu_{Fe}\mu_0} \frac{1}{\mu_{Fe}} B_{tr}^2 \quad (3.7)$$

Die Differenz ist damit gegeben durch

$$\Delta\sigma = \sigma_l - \sigma_r = \frac{\mu_{Fe}-1}{2\mu_{Fe}\mu_0} (B_{il}^2 - B_{tr}^2) \quad (3.8)$$

Mit Hilfe der Gln. 3.5 und 3.6 findet man

$$B_{il}^2 - B_{tr}^2 = \left[ B_0 + \frac{\mu_{Fe}^2 \mu_0}{2(a+b)} I \right]^2 - \left[ B_0 - \frac{\mu_{Fe}^2 \mu_0}{2(a+b)} I \right]^2$$

$$\begin{aligned}
& B_0^2 + 2B_0 \frac{\mu_{Fe}\mu_0}{2(a+b)} I + \left( \frac{\mu_{Fe}\mu_0}{2(a+b)} I \right)^2 - B_0^2 + 2B_0 \frac{\mu_{Fe}\mu_0}{2(a+b)} I - \left( \frac{\mu_{Fe}\mu_0}{2(a+b)} I \right)^2 \\
& = 2B_0 \frac{\mu_{Fe}\mu_0}{(a+b)} I
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Differenz der Normalspannungen lautet damit:

$$\Delta\sigma = \frac{\mu_{Fe}-1}{\mu_{Fe}} \frac{1}{(a+b)} B_0 I \tag{3.10}$$

Aus der Normalspannung ergibt sich die Kraft  $F_N$  auf die Nut durch Multiplikation mit der Fläche  $A = a \cdot l$ . Dabei sind  $a$  die Höhe der Nut und  $l$  die Länge des Rotors.

$$F_N = \Delta\sigma \cdot A = \frac{\mu_{Fe}-1}{\mu_{Fe}} \frac{a}{(a+b)} B_0 \cdot I \cdot l \tag{3.11}$$

Zu dieser Kraft ist noch die Kraft auf den Leiter hinzuzufügen. Diese läßt sich angeben, wenn die Flußdichte des Hauptflusses im Luftraum  $B_{0L}$  der Nut bekannt ist. Da das Feld der Maschine in den Nuten nicht analytisch bekannt ist, kann wieder nur eine Annahme weiterhelfen. In [2] wird die Flußdichte im Eisen in den Luftraum der Nut umgerechnet nach der Kontinuitätsbeziehung für  $B$  von Gl. 2.5:

$$\mu_2 B_1 = \mu_1 B_2 \tag{3.12}$$

Dies führt zu

$$B_{0L} = \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}\mu_0} B_0 = \frac{B_0}{\mu_{Fe}} \tag{3.13}$$

Man nimmt also an, das  $B_{0L}$  im gesamten Nutenraum konstant ist. Dann beträgt die Kraft  $F_L$  auf den Leiter

$$F_L = \frac{1}{\mu_{Fe}} B_0 \cdot I \cdot l \tag{3.14}$$

Die Gesamtkraft, die der Strom im Leiter bewirkt, lautet damit

$$F = F_N + F_L = \frac{\mu_r-1}{\mu_r} \frac{a}{(a+b)} B_0 \cdot I \cdot l + \frac{1}{\mu_r} B_0 \cdot I \cdot l = \left\{ \frac{\mu_r-1}{\mu_r} \frac{a}{(a+b)} + \frac{1}{\mu_r} \right\} B_0 \cdot I \cdot l \tag{3.15}$$

Wenn nun die Nutenbreite  $b$  gegen die Höhe  $a$  vernachlässigt wird und  $B_0 \rightarrow B_f$  geht (schmale Nut), kommt man zu dem gewünschten Ergebnis von Gl. 1.1

$$F = B_f \cdot I \cdot l \tag{3.16}$$

Das Ergebnis ist damit zwar nicht exakt gefunden und gilt nur für konstante Permeabilität. Aber Gl. 3.15 läßt doch erkennen, daß die Tendenz stimmt und die Seitenwände der geschlossenen Nut tatsächlich einen sehr großen Teil der Kraft aufbringen.

Im Rahmen der hier getroffenen Vereinfachungen ist die Kraft der Nut  $\frac{(\mu_r-1)a}{(a+b)}$  mal größer als die Kraft auf den Leiter.

## 4 Berechnung der Nutenkraft nach Eckhardt

Das Nutenfeld von Bild 4.1 aus [4] legt einen Feldverlauf nach Bild 4.2 nahe. Der eingezeichnete Feldverlauf geht zweimal durch den Luftspalt. Der Streufluß  $B_q$  in der Nut wird vernachlässigt. Idealisiert läßt sich schreiben

$$\oint \mathbf{H} ds = I = H_{Fe} 2(b+a) + H_\delta 2\delta \tag{4.1}$$

Die Feldstärken führen zu den Flußdichten

$$B_{Fe} = \mu_r \mu_0 H_{Fe} \quad B_\delta = \mu_0 H_\delta \quad (4.2)$$

Näherungsweise gilt, wenn der Streufluß  $B_q$  vernachlässigt wird

$$B_{Fe} = B_\delta \quad (4.3)$$

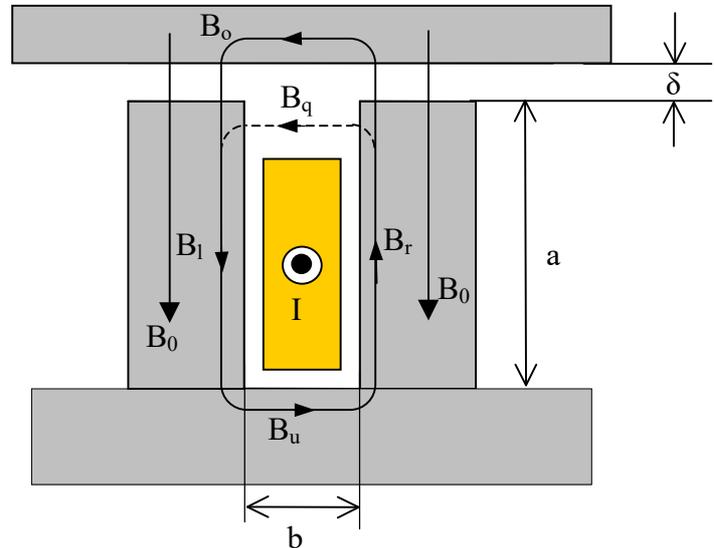
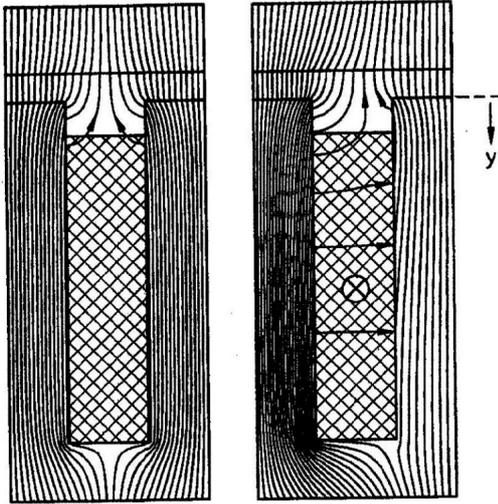


Bild 4.1: Nutenfelder aus [4]

Bild 4.2: Felder bei offener Nut

Daraus erhält man einen Zusammenhang zwischen  $H_\delta$  und  $H_{Fe}$ .

$$\mu_{Fe} \mu_0 H_{Fe} = \mu_0 H_\delta$$

$$H_{Fe} = \frac{1}{\mu_{Fe}} H_\delta \quad (4.4)$$

Damit kann  $H_\delta$  aus Gl. 4.1 berechnet werden:

$$H_{\delta 4.1} = \frac{\mu_{Fe}}{2[b + a + \mu_{Fe} \delta]} I \quad (4.5)$$

Normalerweise gilt  $b + a \ll \mu_{Fe} \delta$ . Dann erhält man als Näherung

$$H_\delta \approx \frac{I}{2\delta} \quad (4.6)$$

Der prozentuale Fehler beträgt

$$\alpha = \frac{H_\delta - H_{\delta 4.1}}{H_{\delta 4.1}} 100\% = \left( \frac{H_\delta}{H_{\delta 4.1}} - 1 \right) \cdot 100\% = \left( \frac{2[b + a + \mu_{Fe} \delta]}{\mu_{Fe} 2\delta} - 1 \right) \cdot 100\% = \frac{b + a}{\mu_{Fe} \delta} 100\%$$

Realistische Daten sind z. B.:

$$\mu_{Fe} = 1000$$

$$a + b = 0,12 \text{ m}$$

$$\delta = 0,002 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{b + a}{\mu_{Fe} \delta} 100\% = \frac{0,12 \text{ m}}{1000 \cdot 0,002 \text{ m}} 100\% = 6 \%$$

Der Fehler der Vernachlässigung liegt also in der Größenordnung von 6%. Nimmt man diesen in Kauf, kann man mit Gl. 4.6 arbeiten und mit den Gl. 4.2 und 4.3 schreiben:

$$B_{\delta} = B_{Fe} = \frac{\mu_0}{2\delta} I \quad (4.7)$$

Dies ist der bei Eckehardt [4] verfolgte Ansatz. Dieser wird dort dazu benutzt, um die Kraft aus der magnetischen Luftspaltenergie zu berechnen, was zu dem Ergebnis von Gl. 1.1 führt und im Abschnitt 5 wieder aufgegriffen wird.

Abweichend davon soll hier noch einmal, wie im Abschnitt 3, die Kraft auf die Nutenflanken über die magnetischen Flächenspannungen untersucht werden. Mit Gl. 4.7 herrschen an den linken und rechten Nutflanken die tangentialen Flußdichten

$$B_{il} = B_0 + B_{\delta} = B_0 + \frac{\mu_0}{2\delta} I \quad (4.8)$$

$$B_{ir} = B_0 - B_{\delta} = B_0 - \frac{\mu_0}{2\delta} I \quad (4.9)$$

Diese können in Gl. 3.8 eingesetzt werden. Dort ist die Differenz der tangentialen Flußdichten zu bilden:

$$B_{il}^2 - B_{ir}^2 = B_0^2 + 2B_0 \frac{\mu_0}{2\delta} I + \left( \frac{\mu_0}{2\delta} I \right)^2 - B_0^2 + 2B_0 \frac{\mu_0}{2\delta} I - \left( \frac{\mu_0}{2\delta} I \right)^2 = 2B_0 \frac{\mu_0}{\delta} I \quad (4.10)$$

Die Differenz der Flächenspannungen beträgt damit

$$\Delta\sigma = \frac{\mu_{Fe} - 1}{2\mu_{Fe}^2 \mu_0} 2B_0 \frac{\mu_0}{\delta} I = \frac{\mu_{Fe} - 1}{\mu_{Fe}^2 \delta} B_0 I \quad (4.11)$$

Die Multiplikation mit der Fläche der Nut  $A = a l$  ( $a$  Nuthöhe,  $l$  Rotorlänge) liefert die Kraft

$$F_N = \Delta\sigma \cdot A = \frac{\mu_{Fe} - 1}{\mu_{Fe}^2} \frac{a}{\delta} B_0 \cdot I \cdot l \quad (4.12)$$

Mit der Flußdichte in der Nut nach Gl. 3.13 erhält man für die Kraft auf den Leiter wieder

$$F_L = \frac{1}{\mu_{Fe}} B_0 \cdot I \cdot l \quad (4.13)$$

Als gesamte durch den Strom im Leiter verursachte Kraft folgt somit

$$F = F_{Nut} + F_{Leiter} = \frac{\mu_{Fe} - 1}{\mu_{Fe}^2 \delta} B_0 I \cdot a \cdot l + \frac{1}{\mu_{Fe}} B_0 I \cdot l$$

$$F = \left[ \frac{\mu_{Fe} - 1}{\mu_{Fe}} \cdot \frac{a}{\mu_{Fe} \delta} + \frac{1}{\mu_{Fe}} \right] B_0 I \cdot l \quad (4.14)$$

Mit der relativen Permeabilität des Eisens von  $\mu_{Fe} > 1000$  ergibt sich als Näherung

$$F \approx \frac{a}{\mu_{Fe} \delta} B_0 I \cdot l \quad (4.15)$$

Diese Ergebnis weicht erheblich von Gl. 1.1 ab. Mit dem Luftspalt  $\delta$  tritt eine Geometriegröße auf, die mit den Abmessungen der Nut nichts zu tun hat. Das  $\mu_{Fe}$  im Nenner führt außerdem zu einem stark reduzierten Ergebnis, das weit von der Zielgröße von Gl. 1.1 entfernt ist. Die relative Abweichung beträgt

$$\alpha = \frac{F_{4.16} - F_{1.1}}{F_{1.1}} = \frac{\frac{a}{\mu_{Fe} \delta} B_0 I \cdot l - B_0 I \cdot l}{B_0 I \cdot l} = \frac{a}{\mu_{Fe} \delta} - 1 = \frac{a - \mu_{Fe} \delta}{\mu_{Fe} \delta} \quad (4.16)$$

Mit den Daten  $a = 0,1 \text{ m}$ ,  $\delta = 0,002 \text{ m}$ ,  $\mu_{Fe} = 1000$  ergibt sich eine prozentuale Abweichung  $\alpha$  von der Größe

$$\alpha\% = \frac{a - \mu_{Fe}\delta}{\mu_{Fe}\delta} 100\% = \frac{0,1\text{m} - 1000 \cdot 0,002\text{m}}{1000 \cdot 0,002\text{m}} 100\% = -90\% \quad (4.17)$$

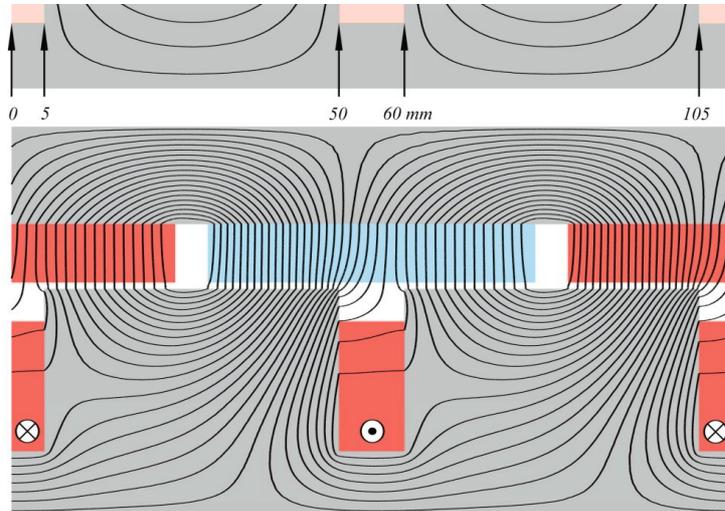


Bild 4.3: Feldverlauf einer 2-Poligen Maschine aus [7]

Dieses Ergebnis überrascht zunächst. Die Kraft auf die Nutenflanken ist 90 % zu klein. Das Ergebnis deckt sich aber mit den Berechnungen in [3]. Im Vergleich zu Abschnitt 3 muß man berücksichtigen, daß eine völlig andere Nutenstruktur vorliegt und darum die tangentialen Feldstärke-unterschiede an den linken und rechten Nutenflanken deutlich geringer ausfallen. Die vom Strom erzeugte Flußdichte betrug bei

$$\text{Gl. 3.4 (geschlossene Nut)} \quad B_{\text{Umlauf}} = \frac{\mu_{Fe}\mu_0 I}{2(a+b)} \quad \text{und bei Gl. 4.7 (offene Nut)} \quad B_{\delta} = B_{Fe} = \frac{\mu_0}{2\delta} I .$$

Angesichts dieses Ergebnisses kann man nicht davon ausgehen, daß bei offenen Nuten die geringere Kraft auf den Leiter durch Kräfte der Tangentialkomponenten des Feldes ausgeglichen wird, zumal nach Gl. 2.14 den Normalkomponenten des Feldes ein wesentlich größeres Gewicht zukommt.

Bei der Betrachtung des Feldlinienverlaufs von Bild 4.3 aus [7] fällt auf, daß die angenommene, idealisierte Annahme über den Feldverlauf auch nicht stimmt. Die Tangentialkomponenten des Feldverlaufs sind nicht vorherrschend. Statt dessen sind auch Normalkomponenten, die in die offene Nut eingreifen zu berücksichtigen, wie dies bei Humburg [3] beschrieben wird.

## 5 Berechnung der Kraft auf den Leiter aus der Luftspaltenergie

Die Energiedichte im magnetischen Feld ist [2]

$$w = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (5.1)$$

Aus dieser Energiedichte soll jetzt die Kraft berechnet werden, die durch einen genutzten Leiter im Feld einer elektrischen Maschine erzeugt wird. Wir lehnen uns an die Darstellung in [5] an. Dazu wickeln wir eine zweipolige Gleichstrommaschine in die Ebene ab. Das Bild 5.1 zeigt oben den Stator mit seinen zwei Polen und unten den Rotor mit einer Leiterschleife. Dieser befindet sich an der Stelle  $x_0$ . Die Pole erzeugen ohne Ankerströme das Feld  $B_f$ .

Mitten durch die Pole wird ein Umlauf gebildet, der den ersten Leiter der Schleife gerade nicht einschließt (Bild 5.1 oben), aber den zweiten. Der Durchflutungssatz liefert für diesen Fall die Feldstärke im Luftspalt:

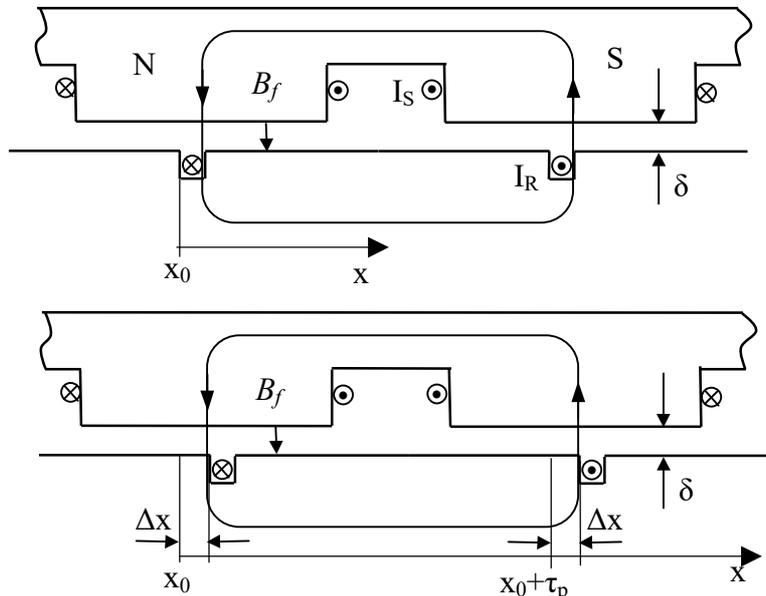


Bild 5.1: Abwicklung des Motors mit zwei Rotorpositionen.

$$\oint \mathbf{H}(x_0) ds = 2I_s + I_r = 2H_\delta(x_0)\delta + H_{SFe}(x_0)s_{SFe} + H_{rFe}(x_0)s_{rFe} \approx 2H_\delta(x_0)\delta \quad (5.2)$$

Darin sind  $I_s$  die Ströme im Stator und  $I_r$  der Strom im Rotor. Die Feldstärken im Eisen sind um  $\mu_{Fe}$  kleiner als im Luftspalt und werden vernachlässigt. Damit erhält man die Näherung

$$H_\delta(x_0) \approx \frac{2I_s + I_r}{2\delta} \quad (5.3)$$

Nun wird der Rotor um  $\Delta x$  nach rechts verschoben und befindet sich an der Stelle  $x_0 + \Delta x$ . Der gleiche Umlauf liefert diesmal als Ergebnis für die Feldstärke im Luftspalt

$$\oint \mathbf{H}(x_0 + \Delta x) ds = 2I_s - I_r \approx 2H_\delta(x_0 + \Delta x)\delta \quad (5.4)$$

$$H_\delta(x_0 + \Delta x) \approx \frac{2I_s - I_r}{2\delta} \quad (5.5)$$

Die Luftspaltinduktionen für die beiden Fälle betragen

$$B_\delta(x_0) = \mu_0 H_\delta(x_0) \approx \frac{\mu_0}{\delta} I_s + \frac{\mu_0}{2\delta} I_r \approx B_f + \frac{\mu_0}{2\delta} I_r \quad (5.6)$$

$$B_\delta(x_0 + \Delta x) = \mu_0 H_\delta(x_0 + \Delta x) \approx \frac{\mu_0}{\delta} I_s - \frac{\mu_0}{2\delta} I_r \approx B_f - \frac{\mu_0}{2\delta} I_r \quad (5.7)$$

$B_f = \frac{\mu_0}{\delta} I_s$  ist das Feld der Maschine. Hier ist zu beachten, daß diese Flußdichte im Bereich der Nut nicht vorhanden ist. Wir tun aber so, als wenn es der Fall wäre. Die Änderung der Energiedichte durch die Verschiebung beträgt dann

$$\Delta w = w(x_0 + \Delta x) - w(x_0) = \frac{1}{2\mu_0} [B_\delta^2(x_0 + \Delta x) - B_\delta^2(x_0)] \quad (5.8)$$

Die Auswertung der eckigen Klammer liefert

$$\begin{aligned}
\left[ B_{\delta}^2(x_0 + \Delta x) - B_{\delta}^2(x_0) \right] &= \left( B_f - \frac{\mu_0}{2\delta} I_R \right)^2 - \left( B_f + \frac{\mu_0}{2\delta} I_R \right)^2 \\
&= B_f^2 - 2B_f \frac{\mu_0}{2\delta} I_R + \left( \frac{\mu_0}{2\delta} I_R \right)^2 - B_f^2 - 2B_f \frac{\mu_0}{2\delta} I_R - \left( \frac{\mu_0}{2\delta} I_R \right)^2 \\
&= -2B_f \frac{\mu_0}{\delta} I_R
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Die Änderung der Energiedichte beträgt damit

$$\Delta w = -\frac{1}{2\mu_0} 2B_f \frac{\mu_0}{\delta} I_R = -\frac{1}{\delta} B_f I_R \tag{5.10}$$

Im Luftspaltvolumen  $V = \delta l \Delta x$ , mit  $l$  als Länge des Rotors, ändert sich die Energie um den Wert

$$\Delta W = \Delta w \cdot V = -\frac{1}{\delta} B_f I_R \cdot \delta \cdot l \cdot \Delta x = -B_f I_R \cdot l \cdot \Delta x \tag{5.11}$$

Die Energieänderung ist negativ, d. h. die Energie hat abgenommen. Die Kraft ergibt sich als Änderung der Energie nach dem Weg. Sie ist in  $-x$ -Richtung gerichtet.

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} = -B_f I_R \cdot l \tag{5.12}$$

Das Vorzeichen kann über die Stromrichtung von  $I_R$  verändert werden. Mit Gl. 5.12 wurde daher formal die Gl. 1.1 bestätigt. Wo diese Kraft am Rotor angreift bleibt dabei offen. Leider kann das Ergebnis nicht befriedigen, da die Feldstärke über der Nut in der Realität kleiner als  $B_f$  ist. Diese Tatsache ist allgemein bekannt und wird beim Entwurf von Maschinen durch den Carterschen Faktor berücksichtigt, über den aus der geometrischen Luftspaltbreite eine magnetisch wirksame Breite berechnet wird [5, 7].

## 6 Runde, geschlossene Nut im homogenen Magnetfeld

Bild 6.1 zeigt eine runde, geschlossene Nut mit einem Leiter im Eisen eines Rotors. Das ferne Magnetfeld  $B_f$  wird als homogen angesehen. Folgende Bedingungen gelten:

- Zunächst keine Ströme im betrachteten Feldraum:  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$
- Daher durch Vektorpotential darstellbar:  $\mathbf{H} = -\text{grad } V_m = -\frac{\partial V_m}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$
- In Eisen 1 und Nut 2 soll mit  $\mu = \text{const.}$  gelten  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div } \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{div } \mathbf{B} = -\text{div } \text{grad } V_m = 0$$

und die Laplace-Differentialgleichung

$$\text{div } \text{grad } V_m = \Delta V_m = 0$$

Diese lautet in Zylinder-Koordinaten:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_m}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} \equiv 0$$

Die Lösung ist von  $z$  unabhängig. Darum gilt

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} = 0$$

Gesucht ist die von  $z$  unabhängige Lösung in Zylinderkoordinaten. In Anlehnung an Küpfmüller [6] wird für  $V_m$  folgender Ansatz verwendet

$$V_{mE}(r, \varphi) = a_E \cdot r \cdot \cos \varphi + \frac{b_E}{r} \cos \varphi \quad \text{magnetisches Potential im Eisen} \quad (6.1)$$

$$V_{mN}(r, \varphi) = a_N \cdot r \cdot \cos \varphi + \frac{b_N}{r} \cos \varphi \quad \text{magnetisches Potential in der Nut} \quad (6.2)$$

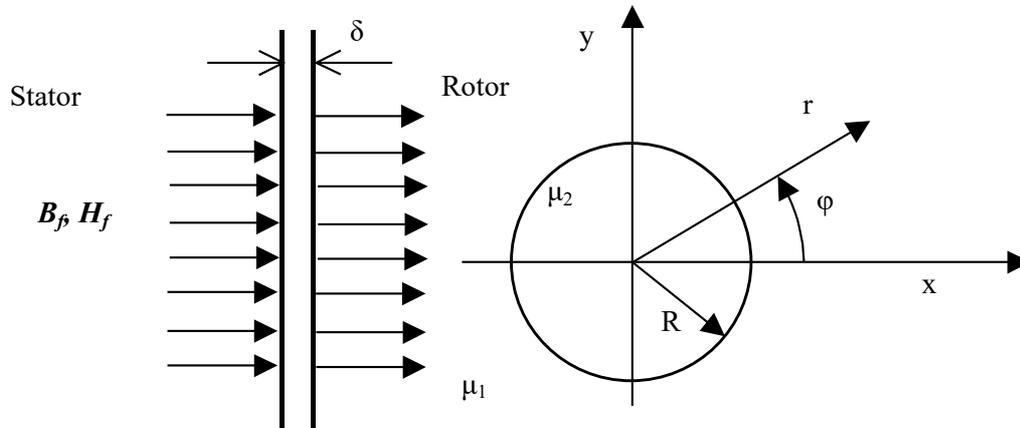


Bild 6.1: Rotor mit runder, geschlossener Nut

Daraus ergeben sich die Komponenten der magnetischen Feldstärke im Eisen (Index E) und in der Nut (Index N):

$$H_{rE} = -\frac{\partial V_{mE}(r, \varphi)}{\partial r} = -a_E \cdot \cos \varphi + \frac{b_E}{r^2} \cos \varphi \quad (6.3)$$

$$H_{\varphi E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_{mE}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = a_E \cdot \sin \varphi + \frac{b_E}{r^2} \sin \varphi \quad (6.4)$$

$$H_{rN} = -\frac{\partial V_{mN}(r, \varphi)}{\partial r} = -a_N \cdot \cos \varphi + \frac{b_N}{r^2} \cos \varphi \quad (6.5)$$

$$H_{\varphi N} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_{mN}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = a_N \cdot \sin \varphi + \frac{b_N}{r^2} \sin \varphi \quad (6.6)$$

Die Parameter werden aus folgenden Randbedingungen bestimmt:

1. Für  $r \rightarrow 0$  muß  $H_N$  endlich bleiben. Daraus folgt  $b_N = 0$  (6.7)

2. Für  $\varphi = 90^\circ$  und  $r \rightarrow \infty$  muß gelten  $H_{\varphi E} = -\frac{B_f}{\mu_E}$ . Daraus folgt  $a_E = -\frac{B_f}{\mu_r \mu_0}$ . (6.8)

3. Für  $\varphi = 180^\circ$  und  $r = R$  muß gelten  $\mu_0 H_{rN} = \mu_0 \mu_r H_{rE}$

4. Für  $\varphi = 90^\circ$  und  $r = R$  muß gelten  $H_{\varphi E} = H_{\varphi N}$

Mit den Gln. 6.7 und 6.8 sind die Parameter  $b_N$  und  $a_E$  bekannt, nämlich

$$a_E = -\frac{B_f}{\mu_r \mu_0} \quad \text{und} \quad b_N = 0.$$

Aus den Bedingungen 3 und 4 werden nun  $a_N$  und  $b_E$  ermittelt. Die Bedingung 3 liefert mit den Gleichungen 6.3 und 6.5:

$$\mu_0 a_N = \mu_0 \mu_r \left( a_E - \frac{b_E}{R^2} \right) \qquad a_E = \frac{1}{\mu_r} a_N + \frac{b_E}{R^2} \qquad (6.9)$$

Bedingung 4 ergibt den Zusammenhang

$$a_N = a_E + \frac{b_E}{R^2} \qquad (6.10)$$

Aus den Gln. 6.9 und 6.10 erhält man.

$$\begin{aligned} a_N - \frac{b_E}{R^2} &= \frac{1}{\mu_r} a_N + \frac{b_E}{R^2} \\ a_N \left( 1 - \frac{1}{\mu_r} \right) &= 2 \frac{b_E}{R^2} \\ a_N &= 2 \frac{b_E}{R^2} \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} \end{aligned} \qquad (6.11)$$

Mit Gl. 6.11 kann  $a_N$  in Gl. 6.10 eliminiert werden. Dies ergibt einen Zusammenhang zwischen  $a_E$  und  $b_E$ .

$$a_E = 2 \frac{b_E}{R^2} \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} - \frac{b_E}{R^2} = \frac{b_E}{R^2} \left( \frac{2\mu_r}{\mu_r - 1} - 1 \right) = \frac{b_E}{R^2} \left( \frac{2\mu_r - \mu_r + 1}{\mu_r - 1} \right) = \frac{b_E}{R^2} \left( \frac{\mu_r + 1}{\mu_r - 1} \right)$$

$a_E$  ist aus Gl. 6.8 bekannt, und es folgt für  $b_E$ :

$$b_E = - \frac{B_f}{\mu_r \mu_0} R^2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \qquad (6.12)$$

Aus Gl. 6.11 ergibt sich nun für  $a_N$

$$\begin{aligned} a_N &= 2 \frac{1}{R^2} \frac{\mu_r}{\mu_r - 1} \left( - \frac{B_f}{\mu_r \mu_0} R^2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \\ a_N &= - \frac{B_f}{\mu_0} \cdot \frac{2}{\mu_r + 1} \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Damit können die magnetischen Felder im Eisen und in der Nut angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_E &= H_{rE} \cdot \mathbf{e}_r + H_{\varphi E} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \left( -a_E \cdot \cos \varphi + \frac{b_E}{r^2} \cos \varphi \right) \cdot \mathbf{e}_r + \left( a_E \cdot \sin \varphi + \frac{b_E}{r^2} \sin \varphi \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{H}_E &= \frac{B_f}{\mu_r \mu_0} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r - \frac{B_f}{\mu_r \mu_0} \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \cdot \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \qquad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_N &= H_{rN} \cdot \mathbf{e}_r + H_{\varphi N} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \left( -a_N \cdot \cos \varphi + \frac{b_N}{r^2} \cos \varphi \right) \cdot \mathbf{e}_r + \left( +a_N \cdot \sin \varphi + \frac{b_N}{r^2} \sin \varphi \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{H}_N &= \frac{B_f}{\mu_0} \frac{2}{\mu_r + 1} \cdot (\cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r - \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi) \end{aligned} \qquad (6.15)$$

Die Feldstärke in der Nut ist homogen und wegen  $\cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r - \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_x$  in x-Richtung gerichtet, wie das Bild 6.2 zeigt.

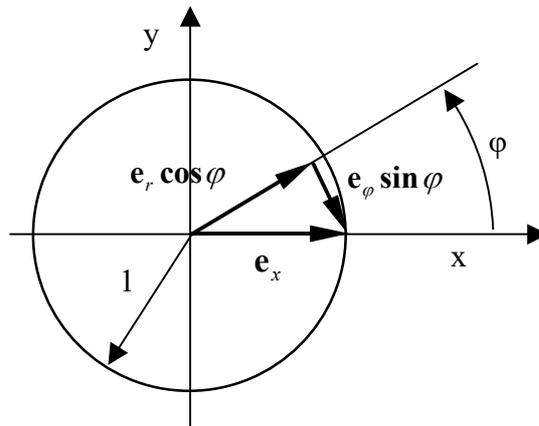


Bild 6.2: Resultierende der Kreiskoordinaten von Bild 6.1

Der Betrag der Feldstärke hat in der Nut die Größe

$$\|\mathbf{H}_N\| = \sqrt{H_{rN}^2 + H_{\varphi N}^2} = \sqrt{(a_N \cdot \cos \varphi)^2 + (a_N \cdot \sin \varphi)^2} = \|a_N\| = 2 \frac{B_f}{\mu_0} \frac{1}{\mu_r + 1} \quad (6.16)$$

Die Feldstärken an der Umrandung der Bohrung betragen im Eisen, also bei  $r = R$

$$H_{rE} = \frac{B_f}{\mu_r \mu_0} \cdot \frac{2}{\mu_r + 1} \cos \varphi \quad H_{\varphi E} = -\frac{B_f}{\mu_0} \cdot \frac{2}{\mu_r + 1} \sin \varphi \quad (6.17)$$

und in der Nut

$$H_{rN} = \frac{B_f}{\mu_0} \cdot \frac{2}{\mu_r + 1} \cos \varphi \quad H_{\varphi N} = -\frac{B_f}{\mu_0} \cdot \frac{2}{\mu_r + 1} \sin \varphi \quad (6.18)$$

## 7 Berechnung der Kraft auf die runde Nut

Da nun die Felder am Rand der Nut bekannt sind, kann die Kraft auf die Nut mit den Mitteln aus Kapitel 2 berechnet werden. Nach dem Schema der Kraft auf den Leiter in der Form  $\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} \cdot l$  ist bei einem Strom in positive z-Richtung von Bild 6.1 eine Kraft in y-Richtung zu erwarten. Dabei ist  $l$  die Länge der Nut. Die Kraft auf die Nut ergibt sich aus der Flächenspannung  $\sigma_{12}$ , die senkrecht auf dem Nutenrand steht und zum Mittelpunkt gerichtet ist, da sie vom Medium mit der höheren Permeabilität  $\mu_1 = \mu_0 \mu_r$  in das Medium mit der kleineren Permeabilität  $\mu_2 = \mu_0$  zeigt.

Die Spannungskomponente  $\sigma_y$  von Bild 7.1 liegt parallel zur y-Achse und hat die Größe

$$\sigma_y = \sigma_{12} \sin \varphi \quad (7.1)$$

und zeigt im Bereich  $y > 0$  in negative y-Richtung.

Da die Felder mit den Gln. 6.14 und 6.15 in Polarkoordinaten vorliegen, d. h. als Normalkomponente in  $\mathbf{e}_r$ -Richtung und als Tangentialkomponente in  $\mathbf{e}_\varphi$ -Richtung, kann man auf

Gleichung 2.12 zurückgreifen. In angepaßter Schreibweise mit  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  als Einheitsvektoren lauten die Tangential- und Normalkomponenten

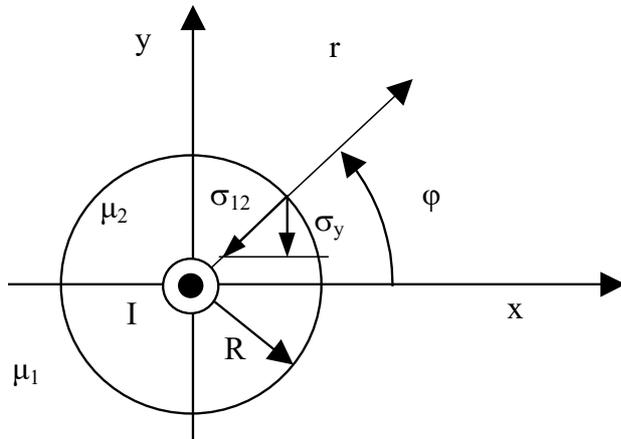


Bild 7.1: Richtung der Spannungskomponenten.

a) für die  $\varphi$ -Komponente als Tangentialkomponente

$$\sigma_{12}^\varphi = -\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)H_{\varphi E}^2 \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad (7.2)$$

b) für die  $r$ -Komponente als Normalkomponente

$$\sigma_{12}^r = -\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)H_{rE \text{ ges}} H_{rN \text{ ges}} \mathbf{e}_r \quad (7.3)$$

Zur  $\varphi$ -Komponente des Feldes in Gl. 7.2 ist die vom Leiterstrom  $I$  erzeugte Feldkomponente hinzuzufügen, die kreisförmig um den Strom liegt und daher an jeder Stelle des Nutenrandes den gleichen Wert aufweist.

$$H_{\varphi E \text{ ges}} = H_{\varphi E} + \frac{I}{2\pi R} = -\frac{B_f}{\mu_0} \frac{2}{\mu_r + 1} \cdot \sin \varphi + \frac{I}{2\pi R} \quad (7.4)$$

Damit wird aus Gl. 7.2 die Beziehung

$$\sigma_{12 \text{ ges}}^\varphi = -\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)H_{\varphi E \text{ ges}}^2 \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad (7.5)$$

Die Kraft in  $y$ -Richtung ergibt sich aus den Gln. 7.1 und 7.5 als Integral über die Nutenfläche  $A = 2\pi Rl$ . Als Flächenelement dient  $dA = lRd\varphi$ . Die Kraft  $F_{Ny}$  auf Nut und Leiter lautet damit

$$F_{Ny} = -R \cdot l \int_0^{2\pi} \sigma_y \cdot d\varphi = -R \cdot l \int_0^{2\pi} \sigma_{12 \text{ ges}}^\varphi \sin \varphi \cdot d\varphi$$

Nach dem Einsetzen der Gln. 7.3 und 7.4 folgt

$$F_{Ny} = -\frac{\mu_0(\mu_r - 1)}{2} R \cdot l \int_0^{2\pi} \left( -\frac{B_f}{\mu_0} \frac{2}{\mu_r + 1} \cdot \sin \varphi + \frac{I}{2\pi R} \right)^2 \sin \varphi \cdot d\varphi \quad (7.6)$$

Zunächst wird die quadratische Klammer aufgelöst:

$$\int_0^{2\pi} \left( \left( -\frac{B_f}{\mu_0} \frac{2}{\mu_r + 1} \right)^2 \sin^2 \varphi - \frac{B_f}{\mu_0} \frac{2}{\mu_r + 1} \sin \varphi \frac{I}{\pi R} + \left( \frac{I}{2\pi R} \right)^2 \right) \sin \varphi \cdot d\varphi =$$

Dies stellt eine Summe von drei Integralen dar mit konstanten Koeffizienten und Potenzen von Sinusfunktionen:

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \cos^3 2\pi - \cos 2\pi - \frac{1}{3} \cos^3 0 + \cos 0 = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi - \frac{1}{4} \sin 4\pi - 0 + \frac{1}{4} \sin 0 = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi = -\cos \varphi \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0$$

Das erste und das dritte Integral sind Null. Das mittlere Integral liefert den Beitrag:

$$F_{N,y} = -\frac{\mu_0(\mu_r - 1)}{2} R \cdot l \int_0^{2\pi} \left( -\frac{B_f}{\mu_0} \cdot \frac{2}{\mu_r + 1} \cdot \frac{I}{\pi R} \right) \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{\mu_0(\mu_r - 1)}{2} R \cdot l \cdot \pi \frac{B_f}{\mu_0} \cdot \frac{2}{\mu_r + 1} \cdot \frac{I}{\pi R}$$

$$F_{N,y} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \cdot l \cdot B_f I \quad (7.7)$$

Neben der Kraft auf die Nut wirkt noch die Lorenzkraft in y-Richtung auf den Leiter. Diese hat die Größe  $F_L = I B_N l$ . Die Feldstärke  $H_{xN}$  in der Nut wurde mit Gl. 6.16 bestimmt zu

$$H_{xN} = 2 \frac{B_f}{\mu_0} \frac{1}{\mu_r + 1} \quad (7.8)$$

Die Flußdicht in der Nut beträgt  $B_{xN} = \mu_0 H_{xN}$  und die Kraft auf den Leiter folglich

$$F_{Ly} = I \cdot B_{xN} \cdot l = \frac{2}{\mu_r + 1} I B_f l \quad (7.9)$$

Die Gesamtkraft in y-Richtung ist damit

$$F = F_{Ny} + F_{Ly} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \cdot I B_f l + \frac{2}{\mu_r + 1} I B_f l = I B_f l \quad (7.10)$$

Dies ist nun in der Tat das Ergebnis von Gl. 1.1.

### **Radiale Felder**

Die Radialkomponente der Spannung  $\sigma_{12}^r$  von Gl. 7.3 an der Grenzschicht führt zu einen Ausdruck für die Kraft, dessen Integral den Wert Null ergibt. Man erhält die Beziehung

$$F_{Nr} = -R \cdot l \int_0^{2\pi} \sigma_y^r \cdot d\varphi = -R \cdot l \int_0^{2\pi} \sigma_{12}^r \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$F_{Nr} = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2) R \cdot l \int_0^{2\pi} H_{rE_{ges}} H_{rN_{ges}} \sin \varphi \cdot d\varphi$$

Hier werden die Radialkomponenten der Gln. 6.17 und 6.18 eingesetzt. Dies ergibt ein Integral von der Form

$$F_{Nr} = K \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi \cdot d\varphi = 0$$

Die radialen Feldkomponenten leisten daher keinen Beitrag zur Kraft.

## **8 Zusammenfassung**

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im magnetischen Feld ist gegeben durch Gl. 1.1:

$$F = B_f \cdot I \cdot l.$$

In elektrischen Maschinen liegen die Leiter meistens in Nuten, in denen die Feldstärke stark reduziert ist. Man geht nun davon aus, daß die geringeren Kräfte auf den Leiter durch magnetische Kräfte ausgeglichen werden, die auf Wandungen der Nuten wirken. In Kapitel 3 lies sich dies für geschlossene Nuten mit einfachen Mitteln näherungsweise nachvollziehen. Die Tangentialfelder an den Nutenflanken gleichen die geringeren Kräfte am Leiter weitgehend aus. In [6] sowie in Abschnitt 7 wurde auch auf analytischem Wege gezeigt, daß für eine runde, geschlossene Nut das Ergebnis von Gl. 1.1 formal genau erreicht wird unter der Annahme konstanter Permeabilität.

In Kapitel 4 ist der Versuch gescheitert für eine offene Nut auf dem Weg von Kapitel 3 zum gleichen Ergebnis zu kommen. Hier treten neben den tangentialen Feldkomponenten auch Normalkomponenten im Nutbereich auf, die der Ansatz nicht berücksichtigen konnte.

In Kapitel 5 wurde die vom Strom im Leiter verursachte Kraft über einen Energieansatz ermittelt, wie das in vieler Literatur praktiziert wird [3, 4, 5, 7]. Dabei kommt man zwar formal zum Ergebnis von Gl. 1.1. Da dieses Ergebnis bei der Auslegung von Maschinen dennoch nicht befriedigt, berücksichtigt man die Feldschwächung durch die Nutung mit Hilfe des Carterschen Faktors, über den der geometrische Luftspalt in eine magnetisch wirksame Größe umgerechnet wird [5, 7]. Bei gleicher Durchflutung stellt sich dann ein schwächeres Luftspaltfeld ein.

Zusammenfassen kann man also sagen, daß die Gl. 1.1 in grober Näherung auch für genutete Leiter gilt. Formal kommt man bei runden, geschlossenen Nuten zu dem Ergebnis, daß die Kräfte gleich sind, egal ob der Leiter im Luftspalt oder in der Nut liegt. Dabei wird aber mißachtet, daß auch bei der runden, geschlossenen Nut eine ungleichmäßige Feldverteilung im Luftspalt entsteht, die eine genaue Übereinstimmung der Kräfte verhindert..

## 9 Literatur

- 1 Paul: Grundlagen der Elektrotechnik 2 – Elektromagnetische Felder und ihre Anwendung. Springer-Vieweg, 2012
- 2 Karl Küpfmüller, Wolfgang Mathis, Albrecht Reibiger: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 19. Auflage, Springer-Vieweg Verlag, 2013
- 3 K. Humburg: Die Entstehung des Drehmomentes in elektrischen Maschinen. Elektrotechnische Zeitschrift, Jahrg. 71, Heft 12
- 4 Eckhardt: Gleichstrommaschinen.
- 5 Dieter Gerling: Elektrische Maschinen und Antriebe. Vorlesung, Universität der Bundeswehr, München.
- 6 K. Küpfmüller: Die magnetischen Feldkräfte an Eisenkörpern. Archiv für Elektrotechnik, Band 50, Heft 3, 1965
- 7 Ekkehard Bolte: Elektrische Maschinen – Grundlagen, Magnetfelder, Wicklungen, Asynchron-maschinen, Synchronmaschinen, Elektronisch kommutierte Gleichstrommaschinen. Springer Verlag, 2012